

CODRUȚ-SORIN ZMICALĂ

**MATEMATICĂ BACALAUREAT –
FILIERA TEHNOLOGICĂ**

**CALE SIGURĂ SPRE NOTA 10
TESTE, BAREME ȘI PROBLEME REZOLVATE**



TESTUL 14.....	70
TESTUL 14: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	72
TESTUL 15.....	75
TESTUL 15: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	77
TESTUL 16.....	80
TESTUL 16: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	82
TESTUL 17.....	85
TESTUL 17: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	87
TESTUL 18.....	90
TESTUL 18: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	92
TESTUL 19.....	95
TESTUL 19: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	97
TESTUL 20.....	100
TESTUL 20: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	102
TESTUL 21.....	105
TESTUL 21: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	107
TESTUL 22.....	110
TESTUL 22: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	112
TESTUL 23.....	115
TESTUL 23: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	117
TESTUL 24.....	120
TESTUL 24: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	122
TESTUL 25.....	125
TESTUL 25: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE.....	127
PROBLEME REZOLVATE ȘI COMENTATE.....	130

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = x(x-8)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{x^3}{3}}{2f'(x)}$.
- 5p c) Demonstrați că $-208 \leq 3f(x) \leq 48$, pentru orice $x \in [0, 8]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)^2 + 2x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 2x) dx = \frac{19}{3}$.
- 5p b) Calculați $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{f(x) - 2x} dx$.
- 5p c) Determinați numărul natural t cu proprietatea că $\int_0^3 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{t}{2} - 3 \ln \frac{5}{2}$.

 NOTIȚE



TESTUL 6

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Arătați că $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 10$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a) + f(a+1) = 4$. |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^x \cdot 10^{-x} = 100$. |
| 5p | 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^2 < 20$. |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -2)$, $B(4, -2)$, $C(0, -2)$ și $D(6, -2)$. Arătați că segmentele AB și CD au același mijloc. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul DEF , dreptunghic în D , cu $DE = 3$ și $DF = 4$. Arătați că $\sin E + \sin F = 1,4$. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| 5p | 1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = \det(A(-1))$. |
| 5p | b) Determinați numărul natural a pentru care $A(1) \cdot A(-1) = aI_2$. |
| 5p | c) Aflați numerele reale x pentru care $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = \det(A(x) + A(-x))$. |
| 5p | 2. Se consideră polinomul $f = X^3 - mX^2 + X + 6$, unde m este număr real, iar x_1 , x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f . |
| 5p | a) Pentru $m = 1$, arătați că $f(1) = 7$. |
| 5p | b) Determinați numărul real m pentru care $x_1(1+x_2) + x_2(1+x_3) + x_3(1+x_1) = x_1x_2x_3$. |
| 5p | c) Dacă f este divizibil cu polinomul $X - 2$, calculați $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$. |

TESTUL 18: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(3+\sqrt{72})-\sqrt{288}+\sqrt{25}=2(3+6\sqrt{2})-12\sqrt{2}+5=$ $=6+12\sqrt{2}-12\sqrt{2}+5=11$	3p 2p
2.	$f(x)=g(x) \Leftrightarrow 3x+7=1-3x \Leftrightarrow x=-1$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=-1$ și $y=4$	3p 2p
3.	$x+3=4^{\frac{1}{2}}$ $x+3=2 \Rightarrow x=-1$, care convine	2p 3p
4.	Prețul obiectului după scumpirea cu 20% este $1000+\frac{20}{100} \cdot 1000=1200$ de lei Prețul obiectului după ieftinirea cu 30% este $1200-\frac{30}{100} \cdot 1200=1200-360=840$ de lei	2p 3p
5.	$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=-1$ și $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a+2}{-5}$ Punctele A , B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AC}=m_{AB} \Leftrightarrow a=3$	3p 2p
6.	Observăm că $x+1 > x-1 > x-3$ și, cum triunghiul este dreptunghic $\Rightarrow (x+1)^2=(x-1)^2+(x-3)^2 \Leftrightarrow x^2-10x+9=0$ Cum x este număr real, strict mai mare decât 3, obținem $x=9$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$B(0)=A-I_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(0))=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=2 \cdot 0-1 \cdot 3=$ $=0-3=-3$	3p 2p
------	---	----------

	$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2X(0)$	3p
b)	$\det(X(a)) = \begin{vmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$, pentru orice număr întreg a $4 = a^2$, de unde obținem $a_1 = 2$ și $a_2 = -2$	2p 3p
c)	$X(a) \cdot X(a+1) = \begin{pmatrix} 4 & 2-4a \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ și $2X(a^2) = \begin{pmatrix} 4 & 2-2a^2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $2-4a = 2-2a^2$, de unde obținem $a = 0$ și $a = 2$	2p 3p
2.a)	$(-2) * (-1) = (-2) \cdot (-1) - 2 = 0$ și $(-2) * 1 = -2 \cdot 1 - 2 = -4$ $(-2) * (-1) + (-2) * 1 = -4$	4p 1p
b)	$x * (10x) = 10x^2 - 2$, pentru orice număr real x $10x^2 - x - 2 = 0$, de unde obținem $x = -\frac{2}{5}$ sau $x = \frac{1}{2}$	2p 3p
c)	$m * n = mn - 2$, pentru orice numere naturale nenule m și n $mn - 2 < 2 \Leftrightarrow mn < 4$ și, cum m și n sunt numere naturale nenule, obținem $(m, n) \in \{(1, 2); (2, 1); (1, 3); (3, 1); (2, 2)\}$	1p 4p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 2 - \frac{1}{x}$	3p
	$= \frac{2x-1}{x}, x \in (0, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + \ln x - x^2}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-x^2}{2x-4} =$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x(x-2)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x}{2} = -1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	1p

Metoda 2: Determinăm dintre punctele A și B (lungimea segmentului AB):

$$AB^2 = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Leftrightarrow$$

$$AB^2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$AB^2 = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} \Leftrightarrow AB = \sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$$AB = 4.$$

Calculăm distanța dintre punctele A și C (lungimea segmentului AC):

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \Leftrightarrow$$

$$AC = \sqrt{(2-2)^2 + (3+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$AC = \sqrt{0^2 + 4^2} \Leftrightarrow AC = \sqrt{16} \Leftrightarrow AC = 4.$$

Determinăm distanța dintre punctele B și C (lungimea segmentului BC):

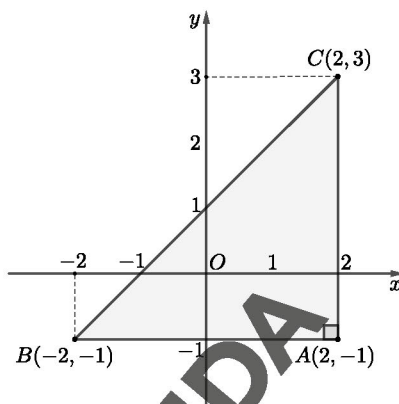
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(2+2)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

Potrivit reciprocei teoremei lui Pitagora, dacă un triunghi are pătratul lungimii unei laturi egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Observăm că $(4\sqrt{2})^2 = 32 = 4^2 + 4^2$, deci $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ este dreptunghic în A .

Ne amintim că $A_{\triangle \text{dreptunghic}} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$, unde c_1 și c_2 sunt cele două catete. Astfel,

$$A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$



15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -2)$, $B(-3, a)$ și $C(1, -1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctele A , B și C sunt coliniare.

Problema 5, subiectul I, testul 18

Rezolvare:

Metoda 1: Trei puncte A , B și C sunt coliniare (se află pe aceeași dreaptă) dacă panta dreptei AB este egală cu panta dreptei AC (sau BC).

Rezolvare:

Dacă x este un unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic, atunci

$$\sin x = \frac{\text{cateta opusă unghiului } x}{\text{ipotenuză}}.$$

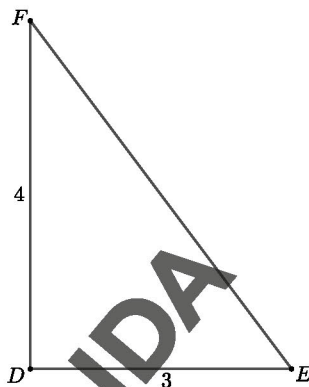
Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle DEF$:

$$EF^2 = DF^2 + DE^2 \Rightarrow EF^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$$

$$EF^2 = 25 \Rightarrow EF = \sqrt{25} \Rightarrow EF = 5.$$

$$\text{Atunci } \sin E = \frac{DF}{EF} = \frac{4}{5} \text{ și } \sin F = \frac{DE}{EF} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Prin urmare, } \sin E + \sin F = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1,4.$$



17. Se consideră $\triangle ABC$, dreptunghic în A , cu $AC=6$ și $BC=10$. Știind că punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB și AC , arătați că $A_{\triangle ABC} = 4A_{\triangle AMN}$.

Problema 6, subiectul I, testul 23

Rezolvare:

Aplicăm teorema lui Pitagora în $\triangle ABC$:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow$$

$$AB^2 + 36 = 100 \Rightarrow AB^2 = 100 - 36 \Rightarrow$$

$$AB^2 = 64 \Rightarrow AB = \sqrt{64} = 8.$$

Cum M - mijlocul segmentului AB rezultă

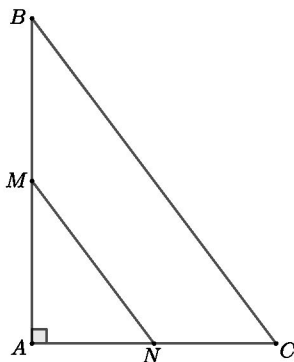
$$AM = \frac{AB}{2} = 4.$$

Cum N - mijlocul segmentului AC rezultă

$$AN = \frac{AC}{2} = 3.$$

$$A_{\triangle AMN} = \frac{AM \cdot AN}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ și } A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

În consecință, $A_{\triangle ABC} = 4A_{\triangle AMN}$.



18. Arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$.

Problema 6, subiectul I, testul 8

Folosim exprimarea ariei cerute cu ajutorul integralei definite:

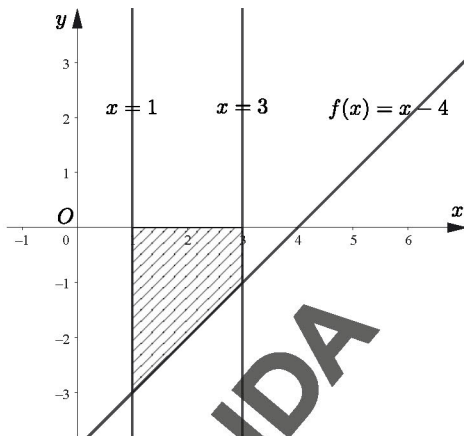
$$\mathcal{A} = \int_1^3 |g(x)| dx = \int_1^3 |x-4| dx.$$

Cum $g(x) < 0$, pentru orice

$$x \in [1, 3], |x-4| = -(x-4) = 4-x,$$

obținem:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_1^3 (4-x) dx = \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^3 = \\ &= \left(4 \cdot 3 - \frac{3^2}{2} \right) - \left(4 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} \right) = 4. \end{aligned}$$



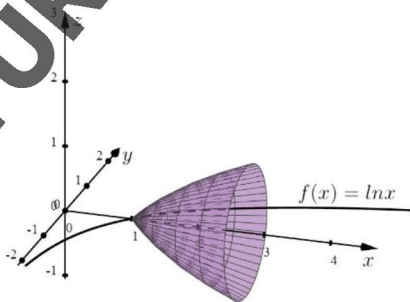
c) Aflăm funcția h , înlocuind $f(x)$:

$$h(x) = \frac{1}{3}(f(x) - x + 4) = \frac{1}{3}(3 \ln x + x - 4 - x + 4) = \frac{1}{3} \cdot 3 \ln x = \ln x, \quad x \in [1, e].$$

Volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției h este:

$$\mathcal{V} = \pi \int_1^e h^2(x) dx = \pi \int_1^e \ln^2 x dx.$$

Pentru rezolvarea integralei precedente, folosim metoda integrării prin părți, observând mai întâi că $\ln^2 x = x' \cdot \ln x$.



Astfel, $\mathcal{V} = \pi \int_1^e x' \cdot \ln^2 x dx =$

$$= \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln^2 x)' dx \right) = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx \right) = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x' \cdot \ln x dx \right) =$$

$$= \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2 \int_1^e x \cdot (\ln x)' dx \right) = \pi \left(x \ln^2 x \Big|_1^e - 2x \ln x \Big|_1^e + 2x \Big|_1^e \right) =$$

$$= \pi(e - 2e + 2e - 2) = \pi(e - 2).$$

**Pentru comenzi vă rugăm să contactați
EDITURA TAIDA**



lași, str. Aeroportului 2B

0232 270 250 0232 270 260

www.editurataida.ro www.eduzone.ro

www.tipotaida.ro



Dă-ne Like pe facebook

www.facebook.com/EDITURA-TAIDA